

CAPITULO 2: PROBLEMAS CINEMATICOS

El estudio cinemático de un mecanismo pretende conocer el movimiento del mismo independientemente de las fuerzas que actúen sobre él. Se trata de un problema puramente geométrico y su solución muestra cuáles son los movimientos factibles del mecanismo en cuestión. Cuando ese mecanismo opere en condiciones reales sometido a la acción de fuerzas, su movimiento será alguno de los posibles encontrados en el análisis cinemático.

En los problemas cinemáticos los valores de posición, velocidad, aceleración, etc. de los grados de libertad del mecanismo son impuestos por el analista. Son, por lo tanto, datos del problema.

En este capítulo se explicará cómo resolver los problemas cinemáticos para cualquier mecanismo que haya sido modelizado en coordenadas naturales, aunque la técnica es extensible a todos los tipos de coordenadas dependientes.

1. Problema de posición inicial.

Consiste en, conocido el valor en posición de los grados de libertad del mecanismo, obtener la posición de todos los elementos del mismo. La solución de este problema puede parecer muy sencilla en el caso de mecanismos de cadena abierta (si se han modelizado con coordenadas relativas), pero no lo es tanto sin duda cuando las cadenas son cerradas.

Dado que, según se ha dicho más arriba, se va abordar el estudio de los problemas cinemáticos asumiendo que la modelización de los mismos se ha realizado en coordenadas naturales, en el problema de posición inicial se tratará de obtener el valor de todas las coordenadas –puntos, vectores unitarios, ángulos, distancias– correspondientes a unos determinados valores de las coordenadas que representen a los grados de libertad. De esta forma, quedará perfectamente establecida la posición de todos los elementos del mecanismo para esos valores de los grados de libertad.

Para concretar más el problema, veamos un ejemplo. Supongamos que el cuadrilátero articulado de la figura 1 ha sido modelizado en coordenadas naturales. El vector de coordenadas del mecanismo sería el siguiente:

$$\mathbf{q}^t = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha\} \quad (1)$$

Entonces, el problema de posición inicial consistirá en averiguar cuáles son los valores que toman las coordenadas x e y de los puntos 1 y 2 para un

determinado valor del ángulo α . Resulta obvio que, conocida la posición de los puntos 1 y 2, todos los elementos quedan perfectamente situados.

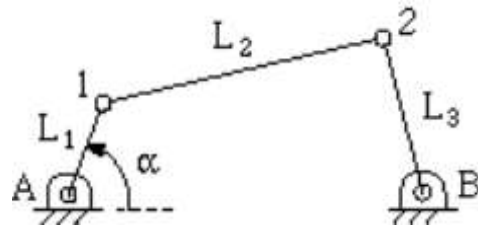


Figura 1. Posición inicial del cuadrilátero articulado.

Por supuesto, son también conocidas las posiciones de los puntos fijos A y B así como las dimensiones de las barras.

En general, las variables del problema se encontrarán ligadas por un cierto número de ecuaciones de restricción, que agruparemos en el denominado vector de restricciones Φ . Entonces, el sistema cuya solución nos proporcionará los valores de las coordenadas buscadas será,

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (2)$$

Este sistema es no lineal. En el ejemplo del cuadrilátero articulado la ecuación vectorial (2) se concreta de la siguiente forma,

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \quad (3a)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (3b)$$

$$(x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 - L_3^2 = 0 \quad (3c)$$

$$(x_1 - x_A) - L_1 \cos \alpha = 0 \quad (3d)$$

Para soslayar la dificultad que supone resolver un sistema no lineal, se recurre a la linealización de la ecuación (2), que se desarrolla en serie de Taylor alrededor de una posición inicial más o menos aproximada, que se toma como punto de partida.

$$\Phi(\mathbf{q}) \cong \Phi(\mathbf{q}_0) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = 0 \quad (4)$$

donde, en el ejemplo, el vector aproximado sería,

$$\mathbf{q}_0^t = \{x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, \alpha\} \quad (5)$$

indicando el superíndice de las variables que se trata de los valores aproximados iniciales. Lógicamente, estos valores iniciales no cumplirán las restricciones. La ecuación (4) se puede reescribir en la forma,

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = -\Phi(\mathbf{q}_0) \quad (6)$$

que representa un sistema lineal de tantas ecuaciones como restricciones se hayan establecido (diremos m , cuatro en el ejemplo) y tantas incógnitas como variables tenga el problema (diremos n , cinco en el ejemplo). Sin embargo, el valor de los grados de libertad es conocido (α en el ejemplo), y dado que, según se vio en el capítulo anterior, el número de grados de libertad es,

$$g = n - m \quad (7)$$

resulta finalmente un sistema cuadrado de tamaño m .

La matriz del sistema de ecuaciones dado por (6) es el jacobiano de las ecuaciones de restricción respecto a las variables, de tamaño $m \times n$, es decir, cada fila contiene las derivadas de la correspondiente ecuación de restricción respecto a cada una de las variables. Veamos cuál es su aspecto en el ejemplo que se está considerando.

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_2 - x_B) & 2(y_2 - y_B) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & L_1 \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (8)$$

El término de la primera fila y primera columna es la derivada de la primera ecuación de restricción respecto a la primera variable, x_1 . El término de la primera fila y segunda columna es la derivada de la primera ecuación de restricción con respecto a la segunda variable, y_1 . Y así sucesivamente.

Entonces, resolviendo el sistema (6), obtendremos una solución \mathbf{q} que llamaremos \mathbf{q}_1 , y que tampoco satisfará completamente las ecuaciones de restricción (3), pero estará más cerca. La nueva solución aproximada será,

$$\mathbf{q}_1^t = \{x_1^1, y_1^1, x_2^1, y_2^1, \alpha\} \quad (9)$$

Obsérvese que el valor de la variable α no varía, ya que se trata del valor del grado de libertad conocido, y que precisamente indica cuál es la posición en la que queremos montar el mecanismo.

El procedimiento visto se empleará de forma iterativa obteniéndose cada vez una solución más próxima a aquélla que satisface exactamente las ecuaciones de restricción. Podemos pues escribir la ecuación (6) en forma general como,

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = -\Phi(\mathbf{q}_i) \quad (10)$$

de manera que, en cada iteración, se obtiene una solución mejorada \mathbf{q}_{i+1} a partir de la anterior \mathbf{q}_i . Este procedimiento es conocido como método iterativo de Newton-Raphson y puede utilizarse para la resolución de cualquier sistema de ecuaciones no lineal. El método goza de convergencia cuadrática en el entorno de la solución, lo que hace que en pocas iteraciones se alcance una solución con un error muy pequeño.

La interpretación geométrica del método de Newton-Raphson es muy clara si se piensa en una función no lineal de una única variable, y se busca su corte con el eje de abscisas. Es decir, si se trata de resolver el problema $f(x)=0$. En el caso de una sola variable el método se denomina sólo de Newton, y su significado geométrico puede verse en la figura 2.

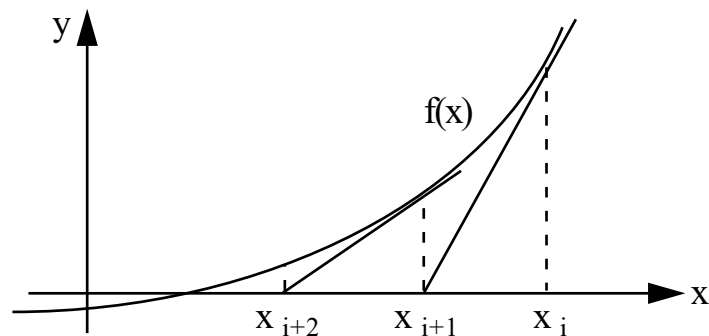


Figura 2. Interpretación geométrica del método de Newton-Raphson.

Es decir, al linealizar el sistema no lineal estamos acercándonos a la solución por medio de las tangentes en las sucesivas soluciones parciales, cada vez más próximas a la solución verdadera. Lo que en el caso de una función de una variable es la pendiente de cada recta tangente, en el caso general de varias funciones de varias variables es la matriz jacobiano. Entender bien esta interpretación nos permitirá descubrir posibles errores en la generación de la matriz jacobiano o el vector de ecuaciones de restricción, a la vista del

comportamiento del proceso iterativo. También facilitará la comprensión de procedimientos alternativos para conseguir un ahorro en el tiempo de cálculo.

Hay que aclarar que el sistema (10) contiene inicialmente m ecuaciones y n incógnitas, si bien, como ya se ha dicho, el valor de las variables que representan a los grados de libertad, en número $g=n-m$, es conocido. Entonces, el valor de $\mathbf{q}_{i+1}-\mathbf{q}_i$ es nulo para los grados de libertad. Por lo tanto, para llegar al sistema cuadrado de tamaño $m \times m$ bastará con eliminar las columnas del jacobiano correspondientes a los grados de libertad. En el ejemplo del cuadrilátero articulado, el sistema (10) quedará, aplicando lo dicho,

$$(11) \quad \begin{bmatrix} 2(x_1^i - x_A) & 2(y_1^i - y_A) & 0 & 0 \\ -2(x_2^i - x_1^i) & -2(y_2^i - y_1^i) & 2(x_2^i - x_1^i) & 2(y_2^i - y_1^i) \\ 0 & 0 & 2(x_2^i - x_B) & 2(y_2^i - y_B) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{i+1} - x_1^i \\ y_1^{i+1} - y_1^i \\ x_2^{i+1} - x_2^i \\ y_2^{i+1} - y_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1^i - x_A)^2 + (y_1^i - y_A)^2 - L_1^2 \\ (x_2^i - x_1^i)^2 + (y_2^i - y_1^i)^2 - L_2^2 \\ (x_2^i - x_B)^2 + (y_2^i - y_B)^2 - L_3^2 \\ (x_1^i - x_A) - L_1 \cos \alpha \end{bmatrix}$$

También merece un comentario especial el tema de la aproximación inicial a la solución necesaria para comenzar el proceso iterativo. Esta aproximación puede ser bastante burda, siendo muy difícil que se encuentre tan alejada de la solución que impida converger a la misma. Sí puede ocurrir que el mecanismo quede montado en una rama diferente a la que nosotros esperamos, debido a que la aproximación inicial que hayamos proporcionado se encuentre más cercana a esa solución.

Para rematar el ejemplo que se ha presentado paralelamente a la explicación general, supongamos que el cuadrilátero articulado de la figura 1 tiene los siguientes datos:

Puntos fijos: A(0,0), B(10,0)

Longitud de las barras: $L_1 = 2$, $L_2 = 8$, $L_3 = 5$

Valor del grado de libertad: $\alpha=60^\circ$

Tomaremos como aproximación inicial:

$$\mathbf{q}_0^t = \{2 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \quad \pi/3\} \quad (12)$$

Para estos valores de las variables las ecuaciones de restricción no se cumplen, es decir, no se hacen iguales a cero. Lógicamente esto ocurre porque el mecanismo no queda correctamente montado con esas coordenadas de los puntos 1 y 2. Para cuantificar en un solo número el incumplimiento de las ecuaciones de restricción, definiremos el siguiente error,

$$e = \sqrt{\sum_{i=1}^m \phi_i^2} \quad (13)$$

donde ϕ_i es el valor que toma cada ecuación de restricción. En la tabla 1 se recoge la evolución del error y el valor de las variables a lo largo del proceso iterativo que resulta al aplicar sucesivamente la ecuación (11).

Iteración	x_1	y_1	x_2	y_2	α	e
0	1.5	1	8	4	1.0472	13.7250
1	1.0	2.1250	8.5781	4.9141	1.0472	2.2632
2	1.0	1.7684	8.4271	4.7514	1.0472	0.1492
3	1.0	1.7324	8.4126	4.7414	1.0472	0.0016
4	1.0	1.7321	8.4125	4.7413	1.0472	1.81e-7
5	1.0	1.7321	8.4125	4.7413	1.0472	3.97e-15

Tabla 1. Problema de posición del cuadrilátero articulado.

El proceso se ha interrumpido al descender el error por debajo de 10^{-8} , aunque podría haberse tomado otra tolerancia. Puede observarse en la tabla 1 como el error desciende rápidamente una vez encauzado el camino hacia la solución. También se ve en la tabla que el valor del ángulo α permanece siempre constante, con valor 1.0472 (el equivalente a 60° en radianes). Esto debe ser así ya que lo que se pretende es precisamente averiguar cuál es el valor de todas las variables cuando el ángulo α toma el valor de 60° . Estos valores son:

$$\mathbf{q}^t = \{1.0 \quad 1.7321 \quad 8.4125 \quad 4.7413 \quad \pi/3\} \quad (14)$$

2. Problema de los desplazamientos finitos.

Este problema consiste en, una vez montado el mecanismo en la posición correspondiente a un determinado valor de los grados de libertad, calcular la nueva posición a que se llega cuando los grados de libertad sufren un cierto incremento (positivo o negativo).

En definitiva, se trata de resolver nuevamente el problema de posición, lo que se consigue por el mismo procedimiento explicado en el apartado anterior. La diferencia radica en la aproximación inicial que se toma. En el problema de posición inicial nos veíamos obligados a partir de unos valores inventados, relativamente próximos a los correctos. Ahora, los valores de partida son los correspondientes a la posición anterior del mecanismo. Si los incrementos proporcionados a los grados de libertad no son demasiado grandes, estos valores de partida serán una buena aproximación a la nueva solución.

Si el problema de los desplazamientos finitos se resuelve repetidamente, podemos conocer el movimiento del mecanismo para un cierto rango de variación de los grados de libertad.

Como ejemplo vamos a resolver el problema de los desplazamientos finitos para el cuadrilátero articulado del apartado anterior, en un rango de valores del grado de libertad (ángulo α) que varía entre 60° y 90° , con un incremento de 5° . Los resultados se recogen en la tabla 2. Dado que el cuadrilátero es manivela-balancín, el lector puede continuar variando el ángulo α a lo largo de toda una vuelta completando así la tabla 2.

α (gdl)	x_1	y_1	x_2	y_2
60	1.0	1.7321	8.4125	4.7413
65	0.8452	1.8126	8.3045	4.7038
70	0.6840	1.8794	8.1856	4.6592
75	0.5176	1.9319	8.0571	4.6071
80	0.3473	1.9696	7.9207	4.5471
85	0.1743	1.9924	7.7780	4.4791
90	0.0	2.0	7.6306	4.4029

Tabla 2. Desplazamientos finitos del cuadrilátero articulado.

Si las distintas posiciones obtenidas se representan gráficamente, se podrá analizar visualmente el movimiento del mecanismo. Esto será de gran interés, ya que, aunque se puedan obtener muchos resultados numéricos de posiciones de puntos, la comprobación visual siempre será una gran ayuda para saber si nuestro mecanismo hace lo que queremos, al menos como una primera y rápida verificación. Problemas tales como la colisión de elementos durante el movimiento del mecanismo son detectados de forma inmediata en una simple visualización.

3. Problema de velocidad.

El problema de velocidad consiste en determinar las derivadas temporales (velocidades) de todas las variables del mecanismo, para una determinada posición del mismo, conocidas las derivadas temporales de las variables que representan a los grados de libertad en esa posición.

Se ha visto al tratar del problema de posición, que las variables con que se ha modelizado un mecanismo han de cumplir las ecuaciones de restricción, que se representan abreviadamente como,

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (15)$$

Si se deriva esta expresión con respecto al tiempo, haciendo uso de la regla de derivación en cadena, se tiene,

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (16)$$

Dado que cuando se resuelve el problema de velocidades ya se conoce la posición del mecanismo, la matriz jacobiana es perfectamente conocida. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (16) es un sistema lineal donde las incógnitas son las velocidades. El sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas, pero las velocidades de los grados de libertad son dato, al igual que sucedía en el problema de posición. Entonces, se pasan al lado derecho de la ecuación (16) las columnas de la matriz jacobiana correspondientes a las variables que son grados de libertad, multiplicada cada columna por el debido valor de velocidad. De esta manera, se llega a un sistema cuadrado de tamaño m .

Vamos a concretar lo dicho en el párrafo anterior realizando un análisis de velocidades para el cuadrilátero articulado que sirvió de ejemplo en el problema de posición.

Se había obtenido que la posición correspondiente a un valor del grado de libertad $\alpha=60^\circ$, venía dada por el vector de variables,

$$\mathbf{q}^t = \{1.0 \quad 1.7321 \quad 8.4125 \quad 4.7413 \quad \pi/3\} \quad (17)$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (16) resulta, para esa posición,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3.4641 & 0 & 0 & 0 \\ -14.8249 & -6.0185 & 14.8249 & 6.0185 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1751 & 9.4826 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1.7321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Esta igualdad nos indica que las velocidades del mecanismo pueden obtenerse en función de la velocidad del grado de libertad. Si α es la variable que representa al grado de libertad existente, el sistema (18) se puede reescribir como,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3.4641 & 0 & 0 \\ -14.8249 & -6.0185 & 14.8249 & 6.0185 \\ 0 & 0 & -3.1751 & 9.4826 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = -\dot{\alpha} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.7321 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Si, por ejemplo, $\dot{\alpha} = 1$, el vector de velocidades resulta,

$$\dot{\mathbf{q}}^t = \{-1.7321 \quad 1.0 \quad -1.1674 \quad -0.3909 \quad 1\} \quad (20)$$

Es inmediato comprobar que la velocidad del punto 1 es correcta.

4. Problema de aceleración.

El problema de aceleración consiste en determinar las derivadas temporales segundas (aceleraciones) de todas las variables del mecanismo, para una determinada posición del mismo y un cierto campo de velocidades, conocidas las derivadas temporales segundas de las variables que representan a los grados de libertad en esa posición.

Derivando respecto al tiempo la expresión (16) que proporciona las velocidades y reordenando se obtiene,

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} \quad (21)$$

La matriz jacobiana sigue siendo perfectamente conocida, la misma que en el problema de velocidades. El término de la derecha es función de las posiciones y velocidades, por lo que también es conocido. Por tanto, he aquí un nuevo sistema lineal, con m ecuaciones y n incógnitas. Sin embargo, como en los problemas anteriores, la diferencia son los grados de libertad, cuyas aceleraciones son conocidas. Así, el sistema final a resolver es cuadrado, de tamaño m .

Como ya se ha hecho para los problemas de posición y velocidad, se van a calcular a continuación las aceleraciones correspondientes al cuadrilátero articulado que se está mostrando como ejemplo.

En primer lugar, veamos cuál es el aspecto del término independiente de la ecuación (21) para dicho cuadrilátero articulado.

$$-\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = - \left\{ \begin{array}{c} 2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ 2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2] \\ 2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ L_1\dot{\alpha}^2 \cos\alpha \end{array} \right\} \quad (22)$$

Entonces, sustituyendo en dicho término independiente los valores ya conocidos de posición y velocidad del cuadrilátero, se tiene que el sistema (21) resulta,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3.4641 & 0 & 0 & 0 \\ -14.8249 & -6.0185 & 14.8249 & 6.0185 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1751 & 9.4826 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1.7321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 8 \\ 4.5068 \\ 3.0312 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Luego, al igual que ocurría en posiciones y velocidades, las aceleraciones de todas las variables se pueden escribir en función de la aceleración del grado de libertad,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3.4641 & 0 & 0 \\ -14.8249 & -6.0185 & 14.8249 & 6.0185 \\ 0 & 0 & -3.1751 & 9.4826 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 8 \\ 4.5068 \\ 3.0312 \\ 1 \end{Bmatrix} - \ddot{\alpha} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.7321 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Si, por ejemplo, la aceleración del grado de libertad es $\ddot{\alpha} = 1$, el vector de aceleraciones vale,

$$\ddot{\mathbf{q}}^t = \{-2.7321 \quad -0.7321 \quad -2.8201 \quad -1.2639 \quad 1\} \quad (25)$$

Es muy fácil comprobar que la aceleración del punto 1 es correcta.

5. La simulación cinemática

Si en el problema de los desplazamientos finitos se introduce la variable tiempo, el resultado es una verdadera simulación cinemática del movimiento del mecanismo. Recuérdese que el problema de los desplazamientos finitos consiste en resolver repetidamente el problema de posición para todo un rango de valores de los grados de libertad. Si esos grados de libertad varían respondiendo a una ley que es función del tiempo, se podrán conocer en cada instante las

posiciones y campos de velocidades y aceleraciones de todos los sólidos del mecanismo, es decir, se estará obteniendo como resultado el movimiento del mismo. A continuación se van a resolver dos ejemplos que ilustren lo dicho.

El primer ejemplo, que se muestra en la figura 3, consiste en un mecanismo biela-manivela plano, utilizado en innumerables aplicaciones prácticas, de las cuales quizá la más conocida sea el motor de explosión convencional.

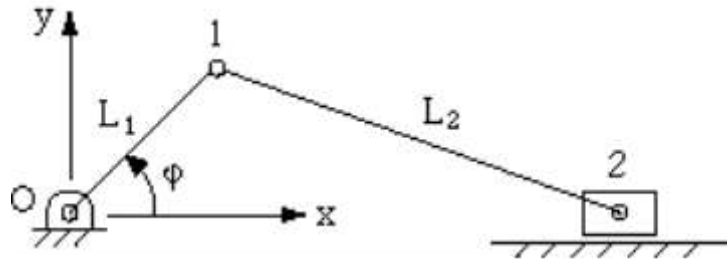


Figura 3. Mecanismo biela-manivela plano.

Para la modelización de este mecanismo en coordenadas naturales se utilizan cuatro variables: las dos coordenadas del punto 1, la coordenada x del punto 2 (ya que la coordenada y es constante), y el ángulo φ .

$$\mathbf{q}^t = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad \varphi\} \quad (26)$$

Entonces, dado que el sistema posee un grado de libertad, habrá que establecer tres ecuaciones de restricción que ligen las variables. Dichas ecuaciones son,

$$x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 = 0 \quad (27)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (28)$$

$$y_1 - L_1 \sin \varphi = 0 \quad (29a)$$

$$x_1 - L_1 \cos \varphi = 0 \quad (29b)$$

El motivo de que aparezcan cuatro ecuaciones es que, según se dijo en el capítulo de modelización, la ecuación de ángulo cambia dependiendo del valor del mismo: para valores de φ tales que $|\sin \varphi| \leq \sqrt{2}/2$ ha de utilizarse la ecuación en seno (29a); en caso contrario ha de emplearse la ecuación en coseno (29b). Por supuesto, puede también optarse por introducir siempre ambas ecuaciones, dando lugar a un sistema de ecuaciones redundantes (cuyo tratamiento se explica más adelante), o por considerar una única ecuación que sea suma de ambas (a veces falla). Respecto a las demás ecuaciones, la (27) es una condición de distancia constante entre los puntos O y 1 impuesta por el carácter rígido de la primera barra, mientras que la (28) es análoga pero para la segunda barra.

Entonces, los vectores de restricciones podrán ser dos: con la ecuación (29a),

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 \\ y_1 - L_1 \sin \varphi \end{array} \right\} \quad (30a)$$

y con la ecuación (29b),

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 \\ x_1 - L_1 \cos \varphi = 0 \end{array} \right\} \quad (30b)$$

La matriz jacobiana de estas ecuaciones adoptará también dos formas posibles, dependiendo de la ecuación de ángulo seleccionada. Si la ecuación es la (29a), la matriz jacobiana resulta,

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_1 \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (31a)$$

mientras que si la ecuación de ángulo es la (29b) se tiene,

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L_1 \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (31b)$$

Por último, habrá también doble opción para el vector de aceleraciones centrífugas y de Coriolis: con la ecuación de ángulo (29a),

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{l} 2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ 2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2] \\ L_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{array} \right\} \quad (32a)$$

y con la ecuación de ángulo (29b),

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} 2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ 2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2] \\ L_1\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{array} \right\} \quad (32b)$$

Por tanto, en cada instante de la simulación cinemática, habrá que comprobar el valor del ángulo φ , para considerar bien los términos (30a), (31a) y (32a), o los (30b), (31b) y (32b).

Para concretar la simulación, se suponen unas longitudes de las barras $L_1 = 2$, $L_2 = 5$, y se define el movimiento del mecanismo a lo largo del tiempo mediante la ecuación (sólo una por existir un único grado de libertad),

$$\varphi(t) = t \quad (33)$$

que significa que la manivela se moverá con velocidad angular constante $\dot{\varphi}(t) = 1$, y aceleración angular también constante $\ddot{\varphi}(t) = 0$. Los resultados de posición, velocidad y aceleración de todas las variables a lo largo del tiempo, correspondientes a la simulación indicada, se muestran a continuación en la tabla 3. Como se ve en la tabla, se han obtenido valores cada 22.5° de giro de la manivela. Obviamente, pueden obtenerse valores para todos los instantes que se desee.

t	x_1	y_1	x_2	φ	\dot{x}_1	\dot{y}_1	\dot{x}_2	$\dot{\varphi}$	\ddot{x}_1	\ddot{y}_1	\ddot{x}_2	$\ddot{\varphi}$
0	1.414	1.414	6.2100	45	-1.414	1.414	-1.831	1	-1.414	-1.414	-1.450	0
0.392	0.765	1.847	5.4114	67.5	-1.847	0.765	-2.152	1	-0.765	-1.847	-0.176	0
0.785	0	2	4.5826	90	-2	0	-2	1	0	-2	0.872	0
1.178	-0.765	1.847	3.8807	112.5	-1.847	-0.765	-1.543	1	0.765	-1.847	1.354	0
1.570	-1.414	1.414	3.3816	135	-1.414	-1.414	-0.997	1	1.414	-1.414	1.378	0
1.963	-1.847	0.765	3.0933	157.5	-0.765	-1.847	-0.479	1	1.847	-0.765	1.258	0
2.356	-2	0	3	180	0	-2	0	1	2	0	1.2	0
2.748	-1.847	-0.765	3.0933	202.5	0.765	-1.847	0.479	1	1.847	0.765	1.258	0
3.141	-1.414	-1.414	3.3816	225	1.414	-1.414	0.997	1	1.414	1.414	1.378	0
3.534	-0.765	-1.847	3.8807	247.5	1.847	-0.765	1.543	1	0.765	1.847	1.354	0
3.927	0	-2	4.5826	270	2	0	2	1	0	2	0.872	0
4.319	0.765	-1.847	5.4114	292.5	1.847	0.765	2.152	1	-0.765	1.847	-0.176	0
4.712	1.414	-1.414	6.2100	315	1.414	1.414	1.831	1	-1.414	1.414	-1.450	0
5.105	1.847	-0.765	6.7888	337.5	0.765	1.847	1.051	1	-1.847	0.765	-2.436	0
5.497	2	0	7	360	0	2	0	1	-2	0	-2.8	0
5.890	1.847	0.765	6.7888	22.5	-0.765	1.847	-1.051	1	-1.847	-0.765	-2.436	0
6.283	1.414	1.414	6.2100	45	-1.414	1.414	-1.831	1	-1.414	-1.414	-1.450	0

Tabla 3. Simulación cinemática del mecanismo biela-manivela plano.

El segundo ejemplo, que se muestra en la figura 4, consiste en un mecanismo biela-manivela espacial.

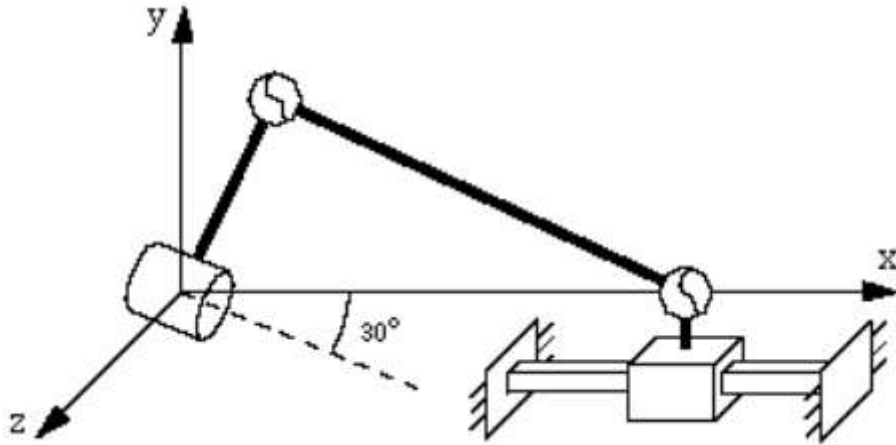


Figura 4. Mecanismo biela-manivela espacial.

El par de revolución situado en el origen de coordenadas tiene su eje contenido en el plano xy , formando un ángulo de 30° con el eje x , según puede apreciarse en la figura 4. Esto hace que, al girar la barra unida a dicho par, el carrito experimente un movimiento rectilíneo de ida y vuelta de cierta amplitud sobre la corredera. Si el ángulo que forma el eje del par con el eje x se modifica, también lo hace la amplitud de carrera del carrito. Este es pues un mecanismo que permite obtener un movimiento rectilíneo alternativo de amplitud variable.

La modelización de este mecanismo en coordenadas naturales se muestra en la figura 5.

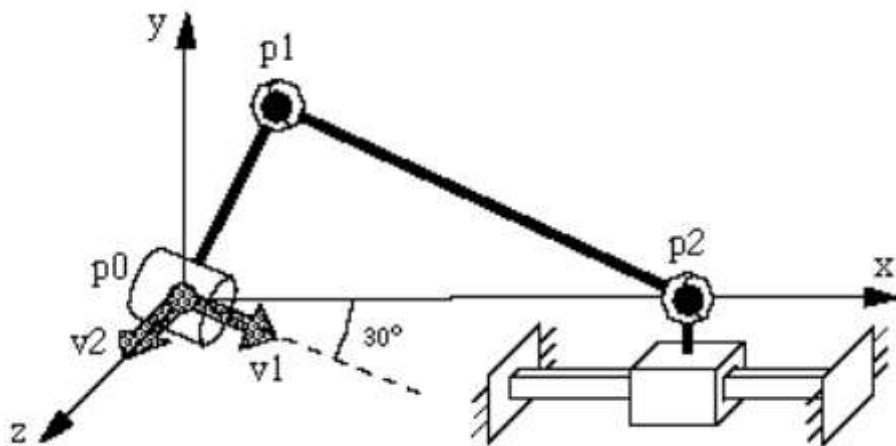


Figura 5. Modelización del mecanismo biela-manivela espacial.

Se utilizan cinco variables: las tres coordenadas del punto 1, la coordenada x del punto 2 y un ángulo (que no aparece en la figura por claridad del dibujo), que es el formado por el vector unitario fijo 2 y el vector que va del punto fijo 0 al punto móvil 1, medido según el vector unitario fijo 1.

$$\mathbf{q}^t = \{x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad \varphi\} \quad (34)$$

La longitud de la barra unida al par de revolución es $L_1 = 2$, y la de la barra con dos rótulas esféricas en los extremos es $L_2 = 6$.

Las ecuaciones de restricción que ligan las variables son las siguientes:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - L_1^2 = 0 \quad (35)$$

$$(x_1 - x_0)v_{1x} + (y_1 - y_0)v_{1y} + (z_1 - z_0)v_{1z} = 0 \quad (36)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (37)$$

$$(z_1 - z_0) - L_1 \cos\varphi = 0 \quad (38a)$$

$$-(y_1 - y_0) - L_1 v_{1x} \operatorname{sen}\varphi = 0 \quad (38b)$$

$$(x_1 - x_0) - L_1 v_{1y} \operatorname{sen}\varphi = 0 \quad (38c)$$

La primera es una ecuación de distancia constante que asegura el carácter rígido de la barra 1. La segunda es una ecuación de producto escalar constante nulo entre la primera barra y el vector unitario 1, que obliga a la barra a moverse en el plano perpendicular al eje del par de revolución. La tercera es de nuevo una ecuación de distancia constante, esta vez entre los extremos de la barra 2. Por último, la ecuación (38) introduce el ángulo. Como ya se explicó en el capítulo de modelización, la ecuación de ángulo ha de plantearse como ecuación en coseno (producto escalar) o en seno (producto vectorial). La ecuación (38a) procede de establecer el producto escalar entre el vector con origen en el punto 0 y extremo en el punto 1, y el vector unitario 2. Las ecuaciones (38b) y (38c) son, respectivamente, las componentes x e y del producto vectorial entre los mismos vectores. En este caso, la componente z es la ecuación $0=0$, por lo que no tiene interés. Cuando se utiliza el producto vectorial, conviene elegir la ecuación correspondiente a la mayor componente del vector normal al plano definido por los dos vectores del producto. En esta ocasión, dicho vector es el que define el eje del par de revolución, el vector unitario 1. Por tanto, caso de precisarse la ecuación en seno, convendrá elegir la primera ecuación del producto vectorial (38b), aunque la segunda (38c) también funcionaría.

Dado que el sistema tiene un único grado de libertad, el movimiento queda perfectamente definido sabiendo que $\dot{\varphi} = 24$, de valor constante. En el instante inicial $\varphi = 0$.

Se lleva a cabo la simulación cinemática del movimiento del mecanismo correspondiente a una vuelta completa de la barra de entrada, ya que el movimiento se repite en vueltas sucesivas. Se obtienen resultados de posición, velocidad y aceleración de las variables para cada 30° de variación del ángulo

φ , aunque se pueden obtener para todos los valores del ángulo que se desee. Estos resultados se muestran en la tabla 4.

t	x_1	y_1	z_1	x_2	φ	\dot{x}_1	\dot{y}_1	\dot{z}_1	\dot{x}_2	$\dot{\varphi}$	\ddot{x}_1	\ddot{y}_1	\ddot{z}_1	\ddot{x}_2	$\ddot{\varphi}$
0	0	0	2	5.657	0	-24	-41.57	0	-24	24	0	0	-1152	101.8	0
.021	-0.5	-0.866	1.732	5.179	30	-20.78	-36	-24	-18.95	24	288	498.8	-997.7	338.1	0
.043	-0.866	-1.5	1	4.857	60	-12	-20.78	-41.57	-10.18	24	498.8	864	-576	447.9	0
.065	-1	-1.732	0	4.745	90	0	0	-48	0	24	576	997.7	0	475.7	0
.087	-0.886	-1.5	-1	4.857	120	12	20.78	-41.57	10.18	24	498.8	864	576	447.9	0
.109	-0.5	-0.866	-1.732	5.179	150	20.78	36	-24	18.95	24	288	498.8	997.7	338.1	0
.131	0	0	-2	5.657	180	24	41.57	0	24	24	0	0	1152	101.8	0
.153	0.5	0.866	-1.732	6.179	210	20.78	36	24	22.61	24	-288	-498.8	997.7	-237.9	0
.175	0.866	1.5	-1	6.589	240	12	20.78	41.57	13.82	24	-498.8	-864	576	-549.7	0
.196	1	1.732	0	6.745	270	0	0	48	0	24	-576	-997.7	0	-676.3	0
.218	0.866	1.5	1	6.589	300	-12	-20.78	41.57	-13.82	24	-498.8	-864	-576	-549.7	0
.240	0.5	0.866	1.732	6.179	330	-20.78	-36	24	-22.61	24	-288	-498.8	-997.7	-237.9	0
.262	0	0	2	5.657	360	-24	-41.57	0	-24	24	0	0	-1152	101.8	0

Tabla 4. Simulación cinemática del mecanismo biela-manivela espacial.

6. Mecanismos sobredeterminados.

En ocasiones nos encontraremos con mecanismos en los que, una vez modelizados, obtenemos un número de ecuaciones de restricción superior al esperado que, según se ha visto, es $m=n-g$, donde n es el número de variables utilizadas en la modelización y g es el número de grados de libertad del mecanismo.

En el tema de modelización se apuntó ya numerosas veces este hecho. Se hablaba entonces de la posibilidad de llegar a un sistema de ecuaciones redundantes. Pero, ¿cuáles son las causas que puedan llevar a ello? Las analizaremos a continuación.

Una causa es la simple comodidad del analista. Se ha visto en el capítulo de modelización que hay muchos casos (alineación de un punto sobre una recta, definición de coordenadas relativas –ángulos y distancias–) en los que varias ecuaciones de restricción son posibles, pero no independientes entre sí. En esos casos, se planteaban dos opciones: seleccionar las ecuaciones independientes (selección que suele ser variable a lo largo del movimiento), o bien considerar todas, yendo a un sistema de ecuaciones redundantes.

Un segundo origen de sistemas de ecuaciones redundantes son los mecanismos que no cumplen el criterio de Grübler, sino que poseen más grados de libertad que los predichos por el mencionado criterio. Estos mecanismos obtienen su capacidad de movimiento de una configuración especial, no de su relación entre elementos y pares cinemáticos. En estos casos, el sistema de ecuaciones redundantes viene ya servido, pues procede de la propia naturaleza peculiar del mecanismo.

En principio, la presencia de ecuaciones redundantes no debería ser preocupante, ya que, al ser las ecuaciones en exceso combinación lineal de las demás, serán eliminadas por un simple pivotamiento de Gauss, que desechará aquellas ecuaciones “más dependientes” de las demás. Sin embargo, si bien esto es cierto al resolver los problemas de velocidad y aceleración, no tiene por qué serlo para el problema de posición.

El motivo es que, durante el proceso iterativo de Newton-Raphson que, según se ha visto, es preciso llevar a cabo para la resolución del problema de posición, los valores que toman las variables no cumplen las ecuaciones de restricción del mecanismo, esto es, no corresponden a un montaje correcto del mismo. Ello puede dar como consecuencia que el sistema de ecuaciones redundantes se convierta en incompatible, impidiendo seguir adelante en la resolución.

Para evitar este problema matemático, se recurre a obtener la solución de mínimos cuadrados. Esta solución coincidirá con la verdadera si el sistema de ecuaciones es compatible, y será la menos errónea si el sistema es incompatible. De esta forma, se podrá avanzar en el proceso iterativo, llegando finalmente a la solución correcta. Veamos cómo se concreta lo dicho.

Si se tiene el sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (39)$$

la solución de mínimos cuadrados se obtiene resolviendo el sistema,

$$\mathbf{A}^t \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^t \mathbf{b} \quad (40)$$

Entonces, en el problema de posición, en lugar de plantear el sistema de ecuaciones (10), se planteará el siguiente,

$$\Phi_q^t \Phi_q (\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = -\Phi_q^t \Phi \quad (41)$$

Análogamente, para los problemas de velocidad y aceleración puede escribirse, en lugar de (16) y (21),

$$\Phi_q^t \Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (42)$$

$$\Phi_q^t \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = -\Phi_q^t \dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (43)$$

Hay que tener en cuenta que los nuevos sistemas de ecuaciones son cuadrados, de dimensión n . Sin embargo, el número de incógnitas es menor, ya que se conocen los datos correspondientes a aquellas variables que son grados de

libertad. Para tener en cuenta esos datos o, dicho de otra forma, para imponer los valores de los grados de libertad, caben tres opciones en la práctica.

La primera consiste en pasar al término independiente las columnas correspondientes a los grados de libertad multiplicadas por éstos, y resolver el sistema resultante, de rango $n-g$.

La segunda consiste en añadir restricciones que indiquen precisamente cuál es el valor de las variables que representan a los grados de libertad. Por ejemplo, si se pretende imponer que la variable x_1 (grado de libertad) valga 3.5, se añadirá la ecuación de restricción $x_1 - 3.5 = 0$.

La tercera, muy fácil de implementar, consiste en sustituir por un número muy grande los términos de la diagonal correspondientes a los grados de libertad y, por ese mismo número multiplicado por el valor del grado de libertad, el elemento del término independiente asociado. Veamos un ejemplo.

En el sistema cuadrado siguiente, se desea imponer la condición de que la tercera variable valga 17.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Según se ha dicho, habrá que sustituir el término de la diagonal, a_{33} , por un número grande, por ejemplo 10^{15} . Además, el elemento asociado del término independiente, b_3 , deberá sustituirse por 17×10^{15} . Por lo tanto, el sistema a resolver será,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 10^{15} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 17 \cdot 10^{15} \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

De esta forma, la tercera ecuación viene a ser, aproximadamente,

$$10^{15} x_3 = 17 \cdot 10^{15} \quad (46)$$

ya que los demás términos son despreciables. Por tanto, esta tercera ecuación impone la condición de que x_3 sea igual a 17.

La técnica descrita es aplicable a los tres problemas: posición, velocidad y aceleración.

Como ejemplo de sistema sobredeterminado se van a resolver los problemas de posición, velocidad y aceleración del mecanismo esférico que se muestra en la figura 6.

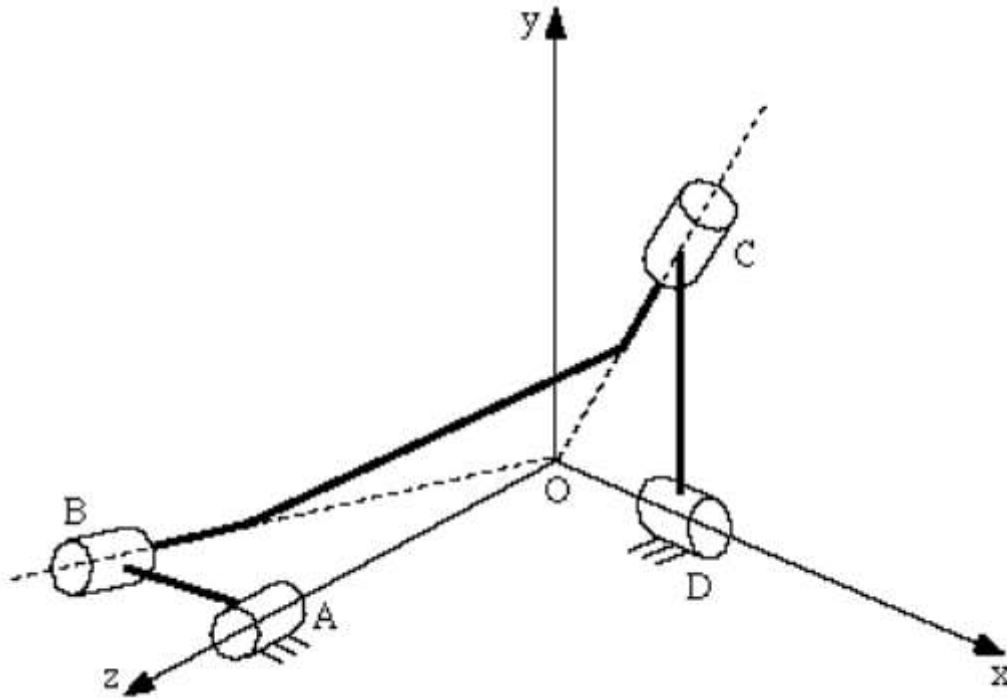


Figura 6. Mecanismo esférico.

Las dimensiones de este mecanismo son: $\overline{AB} = 3$, $\overline{OA} = 7$, $\overline{OD} = 2$, $\overline{CD} = 9$. En la posición de la figura 6, el elemento \overline{AB} se halla en el plano xz , y el elemento \overline{CD} en el plano xy . La velocidad angular del elemento \overline{AB} es $(0,0,-60)$ y su aceleración angular es nula.

Para la resolución de los problemas cinemáticos se realiza la modelización del mecanismo en coordenadas naturales que se muestra en la figura 7. Se emplean como variables dos puntos, p_1 y p_2 , dos vectores unitarios, v_1 y v_2 , y el ángulo de entrada, θ . En total, 13 variables. El resto de puntos, p_A y p_D , y vectores unitarios, v_A y v_D , son fijos. A continuación se establecen las ecuaciones de restricción que ligan las variables.

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 + (z_1 - z_A)^2 - \overline{AB}^2 = 0 \quad (47)$$

$$(x_1 - x_A)v_{Ax} + (y_1 - y_A)v_{Ay} + (z_1 - z_A)v_{Az} = 0 \quad (48)$$

$$(x_1 - x_A)v_{1x} + (y_1 - y_A)v_{1y} + (z_1 - z_A)v_{1z} - C_1 = 0 \quad (49)$$

$$v_{Ax}v_{1x} + v_{Ay}v_{1y} + v_{Az}v_{1z} - C_2 = 0 \quad (50)$$

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2 - 1 = 0 \quad (51)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \overline{BC}^2 = 0 \quad (52)$$

$$(x_2 - x_1)v_{1x} + (y_2 - y_1)v_{1y} + (z_2 - z_1)v_{1z} - C_3 = 0 \quad (53)$$

$$(x_2 - x_1)v_{2x} + (y_2 - y_1)v_{2y} + (z_2 - z_1)v_{2z} - C_4 = 0 \quad (54)$$

$$v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} - C_5 = 0 \quad (55)$$

$$v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2 - 1 = 0 \quad (56)$$

$$(x_2 - x_D)^2 + (y_2 - y_D)^2 + (z_2 - z_D)^2 - \overline{CD}^2 = 0 \quad (57)$$

$$(x_2 - x_D)v_{Dx} + (y_2 - y_D)v_{Dy} + (z_2 - z_D)v_{Dz} = 0 \quad (58)$$

$$(x_2 - x_D)v_{2x} + (y_2 - y_D)v_{2y} + (z_2 - z_D)v_{2z} - C_6 = 0 \quad (59)$$

$$v_{2x}v_{Dx} + v_{2y}v_{Dy} + v_{2z}v_{Dz} - C_7 = 0 \quad (60)$$

$$v_{Dx}(y_1 - y_A) - v_{Dy}(x_1 - x_A) - \overline{AB}\text{sen}\theta = 0 \quad (61)$$

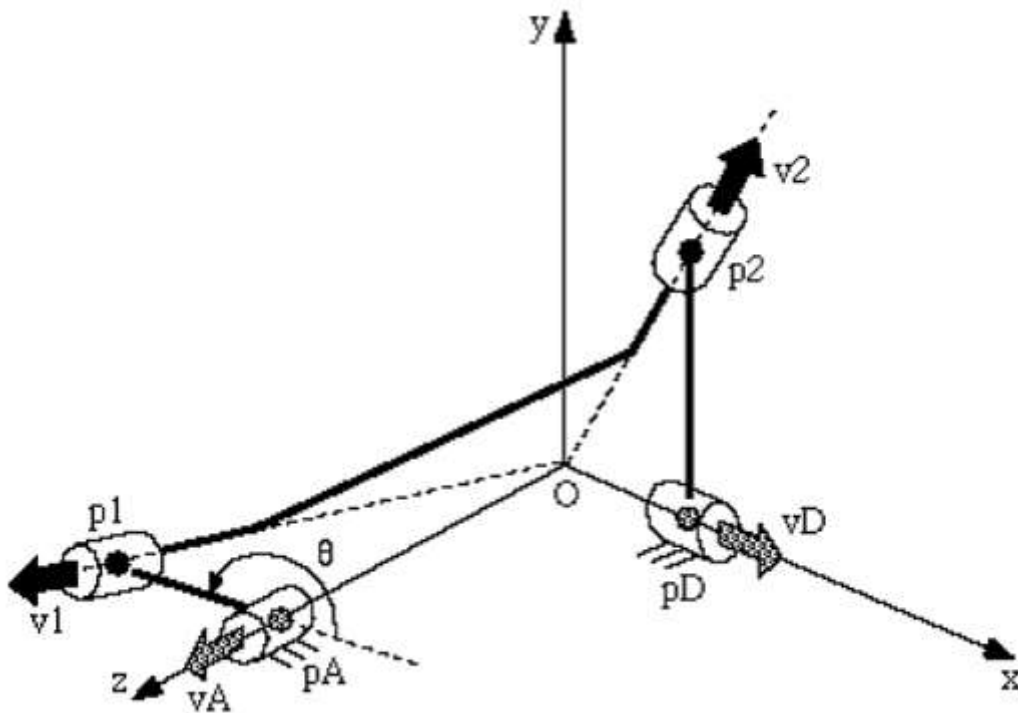


Figura 7. Modelización del mecanismo esférico.

Las ecuaciones (47) a (51) representan las condiciones de sólido rígido del elemento AB. De (52) a (56) las del elemento BC. De (57) a (60) las del CD. La ecuación (61) es la tercera componente del producto vectorial entre el vector unitario v_D y el vector $(p_1 - p_A)$, e introduce como variable del problema al ángulo de entrada θ . Las constantes que aparecen en las ecuaciones de restricción toman el siguiente valor: $C_1 = 1.181758$, $C_2 = 0.919145$,

$$\overline{BC} = 12.449899 , \quad C_3 = -8.403612 , \quad C_4 = 9.870336 , \quad C_5 = -0.085453 , \\ C_6 = 8.785683 , \quad C_7 = 0.216930 .$$

Puede observarse que se han obtenido un total de 15 ecuaciones de restricción para un sistema modelizado con 13 variables. Esto daría como resultado -2 grados de libertad, lo mismo que se calcula para este mecanismo mediante aplicación del criterio de Grübler. Sin embargo, sabemos que, merced a su configuración especial (los ejes de los cuatro pares se cortan en un punto), el mecanismo posee un grado de libertad. Por lo tanto, sólo deben existir 12 ecuaciones de restricción independientes, siendo las tres restantes combinación lineal de las demás.

El problema de posición se resuelve aplicando iterativamente la ecuación (41), partiendo en la primera iteración de una posición aproximada. Si el vector de variables se toma como:

$$\mathbf{q}^t = \{x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad v_{1x} \quad v_{1y} \quad v_{1z} \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad v_{2x} \quad v_{2y} \quad v_{2z} \quad \theta\}$$

la solución que se obtiene para el problema de posición es:

$$\mathbf{q}^t = \{-3 \quad 0 \quad 7 \quad -0.3939 \quad 0 \quad 0.9191 \quad 2 \quad 9 \quad 0 \quad 0.2169 \quad 0.9762 \quad 0 \quad 3.1416\}$$

El problema de velocidad se resuelve aplicando la ecuación (42), y el de aceleración aplicando la ecuación (43). Los resultados son:

$$\dot{\mathbf{q}}^t = \{0 \quad 180 \quad 0 \quad 0 \quad 23.63 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -231.42 \quad 0 \quad 0 \quad -25.10 \quad -60\}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^t = \{10800 \quad 0 \quad 0 \quad 1418 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -5951 \quad -3086 \quad 0 \quad -645 \quad -335 \quad 0\}$$

7. Mejoras en el tiempo de cálculo del problema de posición.

Se ha visto en el primer apartado de este capítulo que, para resolver el problema de posición de un mecanismo, se precisa resolver iterativamente el sistema de ecuaciones

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = -\Phi \quad (62)$$

partiendo de unos valores más o menos aproximados de las variables. Cuando se tiene un problema de tamaño muy grande, con muchas variables, la resolución del sistema de ecuaciones (62) es costosa desde el punto de vista de tiempo de cálculo. En cada nueva iteración hay que recalcular la matriz

jacobiana de las ecuaciones de restricción, triangularizarla y resolver el sistema de ecuaciones.

Cabe, sin embargo, la opción de no renovar la matriz jacobiana durante el proceso iterativo. Es lo que se llama método de Newton-Raphson modificado. La matriz jacobiana sólo se calcula y triangulariza en la primera iteración (o cada cierto número de iteraciones). De esta forma, cada nueva iteración únicamente precisa recalcular el término independiente y efectuar una marcha adelante y vuelta atrás, reduciéndose significativamente el tiempo de cálculo.

La diferencia con el método de Newton-Raphson convencional radica en que, mientras en este último se calcula la tangente a la curva en cada nuevo punto, en el modificado se van trazando paralelas a la primera tangente. Ello puede dar lugar a una convergencia algo más lenta, de manera que sea necesaria alguna iteración adicional. De todas formas, incluso en este caso, el ahorro en el tiempo de cálculo se mantiene.

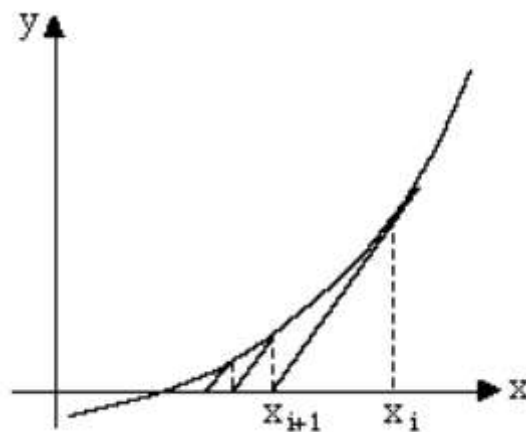


Figura 8. Interpretación del método de Newton-Raphson modificado.

En una función de una sola variable, la interpretación geométrica del método modificado se muestra en la figura 8. Puede compararse con la figura 2 de este capítulo, donde se hizo lo mismo para el método convencional.

8. Problema cinemático inverso.

En ocasiones se pretende conocer el movimiento de un sistema mecánico expresado mediante un determinado conjunto de variables a partir del mismo movimiento expresado en otro conjunto de variables. Un caso típico se da en los robots. Es lo que se conoce como problema cinemático inverso. Vamos a verlo a través de un ejemplo sencillo.

Considérese el manipulador plano de dos grados de libertad que se muestra en la figura 9. El primer brazo tiene una longitud $L_1=4$, y el segundo $L_2=3$.

Supongamos que se pretende que la mano del manipulador describa una trayectoria recta y se quiere averiguar cuáles son los valores de los ángulos que dan como resultado ese movimiento.

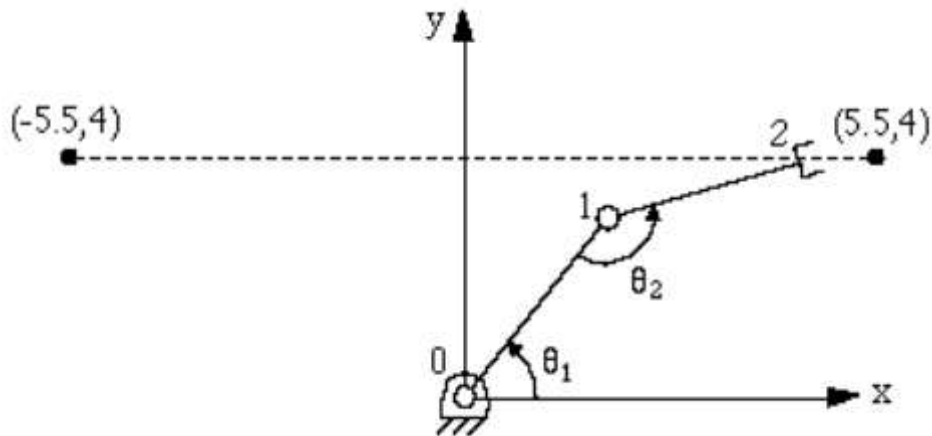


Figura 9. Manipulador plano de dos grados de libertad.

Para ello se modeliza el robot con seis variables: las coordenadas x e y de los puntos 1 y 2, más los dos ángulos.

$$\mathbf{q}^t = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2\} \quad (63)$$

Y acto seguido se resuelve el problema de desplazamientos finitos, empleando como grados de libertad las coordenadas del punto 2: la coordenada x tomará valores comprendidos entre -5.5 y 5.5 , con el incremento que se desee; la coordenada y tomará un valor constante de 4 .

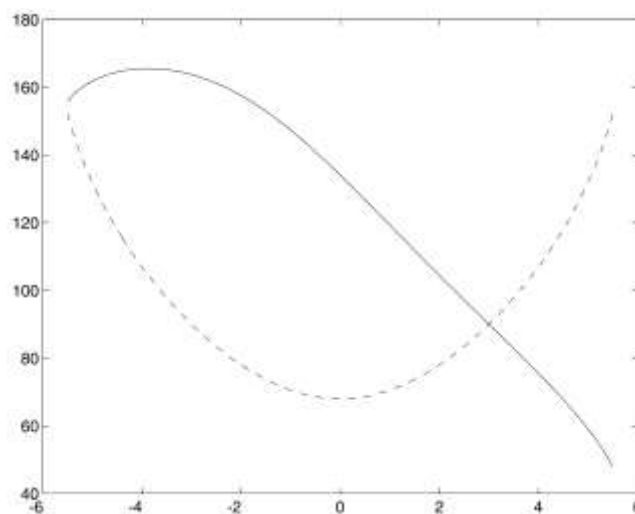


Figura 10. Ángulos del manipulador.

Terminado este análisis, puede obtenerse una gráfica como la que se muestra en la figura 10, donde se representa el valor de los ángulos en grados (ángulo θ_1 en línea continua, ángulo θ_2 en discontinua) frente al valor de la coordenada x de la mano del manipulador (punto 2). De esta forma, si el robot ha de guiarse en la práctica a través de los ángulos, se conoce qué valores han de tomar éstos para conseguir que la mano describa la trayectoria rectilínea deseada.

Al igual que se han obtenido los valores de los ángulos en función de la posición de la mano, se podrían obtener los valores de los ángulos y sus derivadas en función del tiempo. Para ello, bastaría decidir cómo se desea el movimiento de la mano, proporcionando las relaciones,

$$x_2 = f(t) \quad (64)$$

$$y_2 = 4 \quad (65)$$

Entonces, la simulación cinemática (posición, velocidad y aceleración) daría como resultado el valor de los ángulos y sus derivadas a lo largo del tiempo, capaces de generar el movimiento de la mano prescrito.

9. Representación gráfica.

En cualquier simulación, ya sea cinemática o dinámica, es de gran interés poder obtener una visualización del movimiento del mecanismo, ya que posibilita una sencilla y rápida primera verificación del resultado de la simulación (aunque posteriormente haya de corroborarse mediante gráficas o tablas de resultados numéricos). Por ejemplo, si se trata de simular la caída de un péndulo bajo la acción de la gravedad y en la visualización se observa que el sólido sale disparado hacia arriba, no cabe duda de que se ha cometido algún error en el análisis.

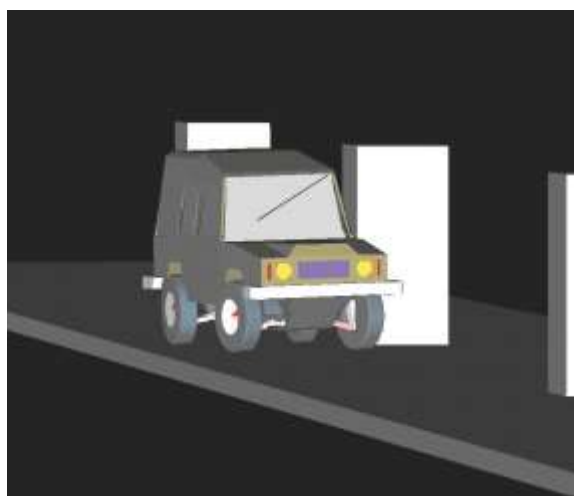


Figura 11. Visualización realista de un sistema mecánico.

En otras ocasiones, la visualización del movimiento será precisamente el principal objetivo de la simulación: tal es el caso de un simulador para entrenamiento de personal o la detección de colisiones entre los componentes de un nuevo diseño de mecanismo.

Para poder obtener una representación gráfica realista del movimiento del mecanismo es imprescindible calcular, para cada instante a representar (escena), las matrices de transformación de todos los elementos del mecanismo.

En efecto, sea cual sea el sistema de gráficos que se utilice, será preciso conocer en cada escena la posición de una serie de puntos de cada sólido del mecanismo. Si la representación es realista, cada sólido estará formado por muchas facetas o superficies, y el número de puntos del mismo cuya posición habrá que conocer será elevado. Sin embargo, según se ha visto en el capítulo de modelización, cada sólido estará definido por unos pocos puntos (y vectores unitarios en el caso 3D).

¿Hace falta entonces aumentar enormemente el tamaño del problema, definiendo en la modelización todos aquellos puntos de interés para la representación gráfica? En absoluto. Si un elemento se ha modelizado correctamente, poseerá las variables (puntos y vectores unitarios) suficientes para situar todo el espacio asociado al elemento (que se mueve con el elemento) y, en consecuencia, conocida la posición de esas variables será posible conocer la posición de cualquier otro punto o vector del elemento. El instrumento para conseguirlo es la matriz de transformación del elemento, que será función de algunos de los puntos y vectores unitarios que definen el elemento.

9.1 Matriz de transformación de un elemento plano.

Para concretar lo expuesto en los párrafos anteriores, se explica a continuación cómo obtener la matriz de transformación de un elemento en el caso plano.

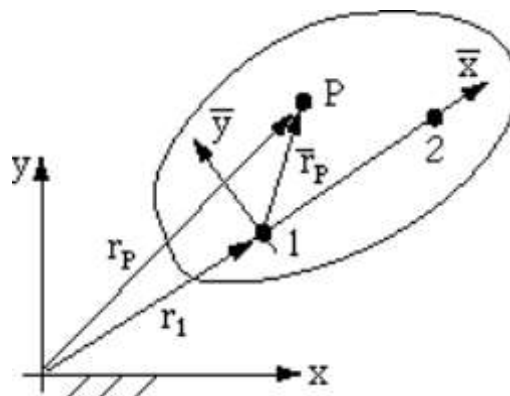


Figura 12. Matriz de transformación de un elemento genérico plano.

La figura 12 muestra un elemento genérico plano. Como se dijo en el capítulo de modelización, un elemento plano queda perfectamente definido con, al menos, dos puntos. Es evidente que la posición absoluta de cualquier punto del elemento podrá escribirse como,

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}_P \quad (66)$$

donde \mathbf{r}_1 es la posición absoluta del origen del sistema de referencia local y \mathbf{A} es la matriz de rotación que relaciona el sistema local con el general.

Aunque no tiene por qué ser así, se puede definir el sistema de referencia local de manera que uno de los puntos básicos del elemento (punto 1) sea el origen, mientras que el eje \bar{x} pase por el otro punto básico (punto 2). Entonces, si la distancia entre los puntos 1 y 2 es L , la matriz de rotación será, en función de las coordenadas generales de ambos puntos,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

La expresión (66) puede reescribirse agrupada de la siguiente forma,

$$\mathbf{r}_P^* = \mathbf{T}\bar{\mathbf{r}}_P^* \quad (68)$$

donde los vectores con asterisco son las llamadas coordenadas homogéneas y \mathbf{T} es la matriz de transformación, que permite pasar de coordenadas locales del elemento a coordenadas generales. En el caso plano, la matriz \mathbf{T} es de tamaño 3x3 y está formada por las submatrices siguientes,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{r}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Por su parte, las coordenadas homogéneas se obtienen sin más que añadir a las coordenadas de los puntos un “1” al final. Así,

$$\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{r}_P^* = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Entonces, es fácil comprobar que la igualdad (68) es equivalente a la (66), si bien añade una nueva ecuación que es la identidad $1=1$. Por tanto, la matriz de

transformación no es más que la información de cambio de sistema de referencia (traslación y matriz de rotación) concentrada en una única matriz. De esta forma, conocida la matriz de transformación de un elemento del mecanismo en un determinado instante, se pueden conocer las coordenadas absolutas de todos los puntos del elemento que se necesiten sin más que aplicar sistemáticamente la expresión (68), lo que permitirá la representación gráfica de dicho elemento. Nótese que las coordenadas locales de los puntos no varían durante el movimiento, por estar el sistema de referencia local rígidamente unido al elemento. Por tanto, dichas coordenadas locales serán una información conocida al principio de la simulación que se mantendrá inalterada a lo largo de la misma.

Para aclarar lo explicado, se resuelve un ejemplo. Supóngase que el triángulo de la figura 13 es equilátero de lado unidad y se halla en movimiento. Si el triángulo ha sido modelizado con los puntos básicos 1 y 2, será la posición de ambos puntos la que se conozca en cada instante, pero no la del punto P. Sin embargo, es obvio que para poder dibujar el triángulo en su posición será preciso disponer de las coordenadas de los tres vértices.

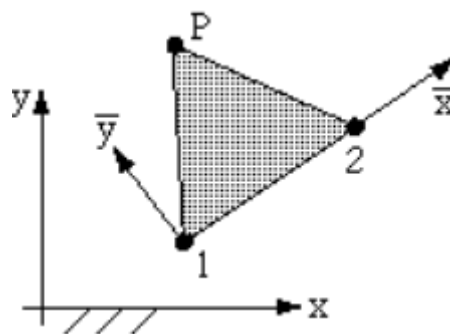


Figura 13. Uso de la matriz de transformación de un elemento.

Dado que el triángulo es equilátero de lado unidad, las coordenadas locales del punto P serán: $\bar{x}_P = 1/2$, $\bar{y}_P = \sqrt{3}/2$. Dichas coordenadas se mantendrán invariables durante el movimiento del triángulo. Si, en el instante representado en la figura 13, las coordenadas generales de los puntos 1 y 2 fueran $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}/2$, $y_2 = 3/2$ (valores que corresponden a una inclinación del segmento $\bar{12}$ de 30° respecto al eje general x), resultarían los siguientes valores de la traslación y matriz de rotación del sistema local del elemento,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

con lo que la matriz de transformación sería,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Entonces, aplicando la expresión (68) se obtendrían las coordenadas generales (homogéneas) del vértice P del triángulo en ese instante,

$$\mathbf{r}_P^* = \mathbf{T}\mathbf{r}_P^* = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

luego el punto P tendría como coordenadas generales: $x_P = 2$, $y_P = 2$. De forma análoga podrían calcularse las coordenadas de todos aquellos puntos del elemento que fueran de interés.

9.2 Matriz de transformación de un elemento tridimensional.

Como ya se dijo en el capítulo de modelización, la correcta definición de un elemento rígido tridimensional precisa de al menos un punto y dos direcciones no alineadas (como direcciones pueden servir vectores unitarios, o bien puntos que den lugar a vectores por diferencia con el punto obligatorio mencionado). Así las cosas, la tercera dirección se obtendría como producto vectorial de las dos existentes, de manera que ya se dispondría de un espacio tridimensional asociado al elemento. Si bien se ha aludido al mínimo necesario, generalmente cada elemento vendrá definido con algo más de generosidad, poseyendo un punto y tres direcciones no coplanarias. Es bajo este supuesto como se va a desarrollar la matriz de transformación de un elemento genérico espacial. Posteriormente se indicará como actuar en el caso mínimo referido al principio del párrafo.

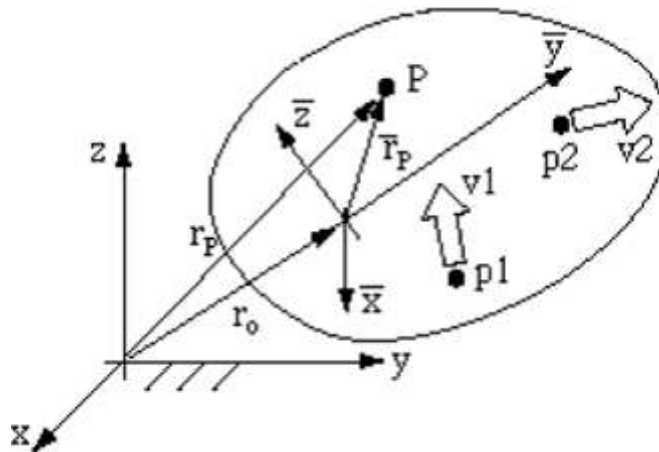


Figura 14. Matriz de transformación de un elemento genérico tridimensional.

Sea el elemento genérico tridimensional que se muestra en la figura 14. Dicho elemento se halla definido por, al menos, dos puntos (p_1 y p_2) y dos vectores unitarios (v_1 y v_2). Con estas variables se pueden construir tres vectores que representen tres direcciones (se asume que no coplanarias): p_2-p_1 , v_1 , v_2 . Las coordenadas locales (constantes) y generales de estos tres vectores se relacionan a través de la matriz de rotación del elemento,

$$[p_2 - p_1 \quad v_1 \quad v_2] = A [p_2 - p_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{v}_2] \quad (74)$$

de manera que, invirtiendo la matriz 3x3 de coordenadas locales (constante) se obtiene,

$$A = [p_2 - p_1 \quad v_1 \quad v_2] [p_2 - p_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{v}_2]^{-1} \quad (75)$$

que de forma abreviada se puede escribir,

$$A = X\bar{X}^{-1} \quad (76)$$

Entonces, calculada al principio de la simulación la matriz de coordenadas locales invertida, \bar{X}^{-1} , que se mantendrá constante durante el movimiento, basta disponer en cada instante de las coordenadas generales de los puntos y vectores unitarios indicados para, con un sencillo producto de matrices 3x3, obtener la matriz de rotación del elemento.

En cuanto al valor de la traslación está claro que, por ser el punto p_1 perteneciente al elemento, se cumplirá

$$r_1 = r_o + A\bar{r}_1 \quad (77)$$

luego, despejando se tiene que,

$$r_o = r_1 - A\bar{r}_1 \quad (78)$$

De forma que, conocida la matriz de rotación, es inmediato calcular el valor de la traslación del origen del sistema de referencia local. Ya se puede, por tanto, montar la matriz de transformación 4x4 del elemento,

$$T = \begin{bmatrix} A & r_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & r_1 - A\bar{r}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Ahora resulta fácil entender cómo se procedería en otros casos de definición del elemento. Por ejemplo, caso de existir solamente un punto y dos direcciones

(supongamos dos puntos p_1 y p_2 y un vector unitario v_1), bastaría con obtener la tercera dirección como producto vectorial de las dos existentes, de modo que la ecuación (74) pasaría a ser,

$$[p_2 - p_1 \quad v_1 \quad (p_2 - p_1) \times v_1] = A [p_2 - p_1 \quad v_1 \quad (p_2 - p_1) \times v_1] \quad (80)$$

Si el elemento poseyera el punto y las tres direcciones pero definidas de forma distinta a la explicada, por ejemplo, mediante tres puntos (p_1 , p_2 y p_3) y un vector unitario (v_1), la ecuación (74) sería sustituida por,

$$[p_2 - p_1 \quad p_3 - p_1 \quad v_1] = A [p_2 - p_1 \quad p_3 - p_1 \quad v_1] \quad (81)$$

En ambos casos o en cualquier otro, una vez replanteada la ecuación (74), se continuaría el razonamiento de manera completamente análoga a la vista.

En el apartado anterior se había mostrado una técnica particular para el elemento genérico plano, donde se asumían algunas condiciones que no tienen por qué darse (origen del sistema de referencia local coincidente con un punto básico y eje \bar{x} pasando por el otro punto básico). Sin embargo, la técnica explicada para un elemento genérico tridimensional es completamente general, pudiendo aplicarse por tanto a elementos planos. Con ello, quedan también resueltos aquellos casos de elementos planos que no cumplan las condiciones exigidas en el desarrollo del apartado anterior.